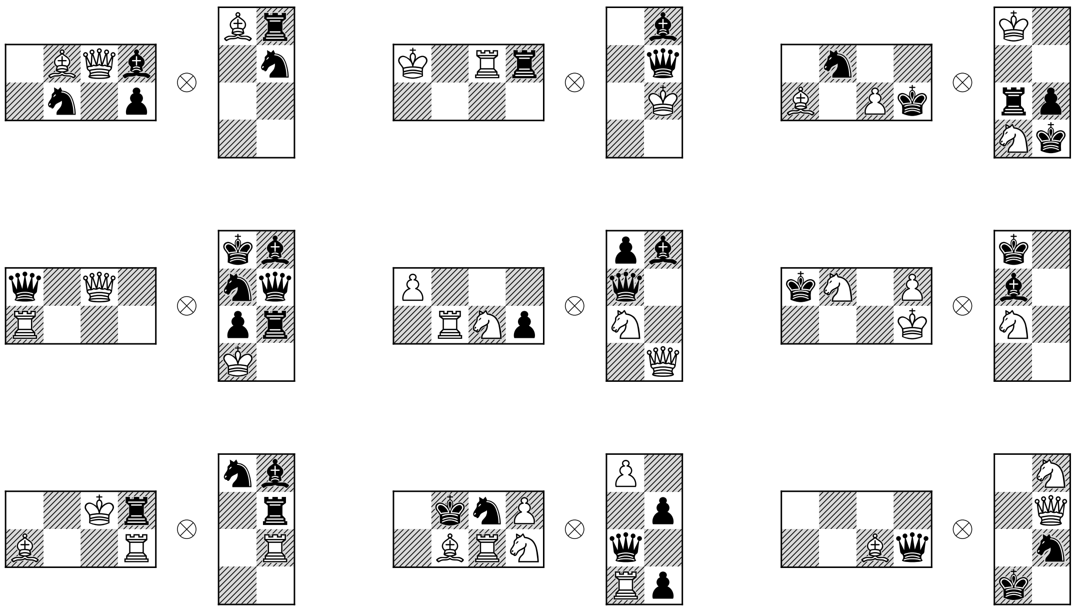
GCHQ-Weihnachtsrätsel 2015

Die Aufgabe

Das Original findet sich im Abschnitt „Algebraic“ auf dieser Seite: `https://www.gchq.gov.uk/information/director-gchqs-christmas-puzzle-part-5`.



Weiß am Zug setzt Matt in $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\,\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\,\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

1. (Figuren-)Multiplikation ist kommutativ: ♗ × ♖ = ♖ × ♗
2. Multiplikation mit einem leeren Feld ergibt ein leeres Feld.
3. Weißer Stein mal weißer Stein ergibt einen weißen Stein.
4. Schwarzer Stein mal schwarzer Stein ergibt einen schwarzen Stein.
5. Weißer Stein mal schwarzer Stein ergibt ein leeres Feld.
6. Aus jedem Stein muss man durch Multiplikation alle möglichen Steine derselben Farbe bilden können.

Jede Multiplikation liefert dabei eine legale Stellung, in der Weiß am Zug ist und in einem Zug mattsetzen kann. Dabei zieht Weiß immer von unten nach oben.

1 Kronecker-Produkt

In der Mathematik ist das Kronecker-Produkt zweier Matrizen[1] folgendermaßen definiert (die gestrichelten Linien sollen der Orientierung dienen, haben aber keine Bedeutung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1\cdot 1 & 1\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 4 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 5 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 6 & 3\cdot 3 & 3\cdot 6 \\ \hdashline 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 4\cdot 1 & 4\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 5 & 4\cdot 2 & 4\cdot 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 & 4\cdot 3 & 4\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 6 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 2 & 8 & 4 & 16 \\ 4 & 10 & 8 & 20 \\ 6 & 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Es wird also jede Zahl der ersten Matrix mit jeder Zahl der zweiten Matrix multipliziert und die Ergebnisse anhand der Reihenfolge in der ersten Matrix sortiert.[2]

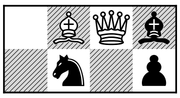
Wenden wir diese Definition und die Multiplikationsregeln auf die neun Schachbrettprodukte an, erhalten wir folgende Stellungen:[3]

[1] „Matrix“ ist ein Science-Fiction-Film mit Keanu Reeves; *eine* Matrix ist eine zweidimensionale Anordnung von Zahlen, mit denen Mathematiker, Informatiker, Ingenieure und andere Nerds viele lustige Sachen anstellen können.

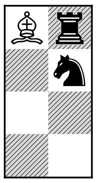
[2] Wer Lust hat, kann ja mal überprüfen, ob diese Multiplikation kommutativ ist, also ob die Rechnung $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ das gleiche Ergebnis liefert.

[3] Die Nummerierung folgt dabei dem Schema $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$, also erst Zeile, dann Spalte.

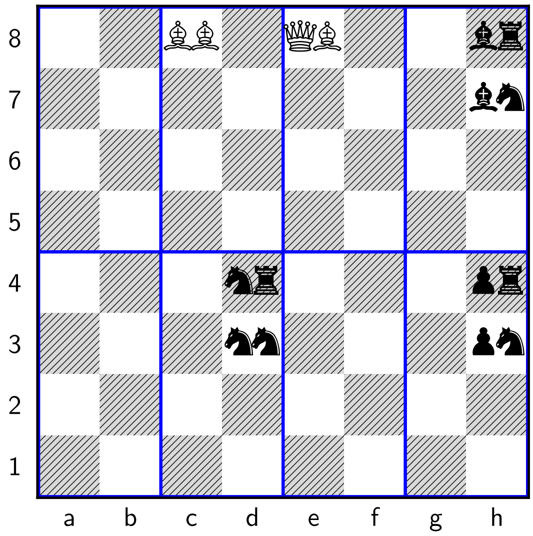
11:



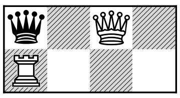
$\otimes$



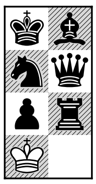
$=$



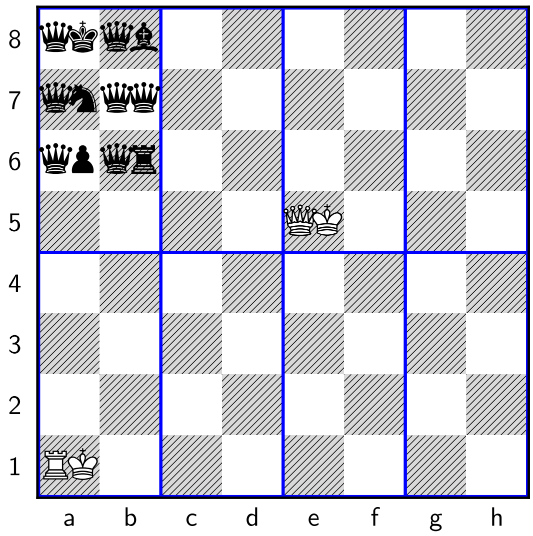
21:



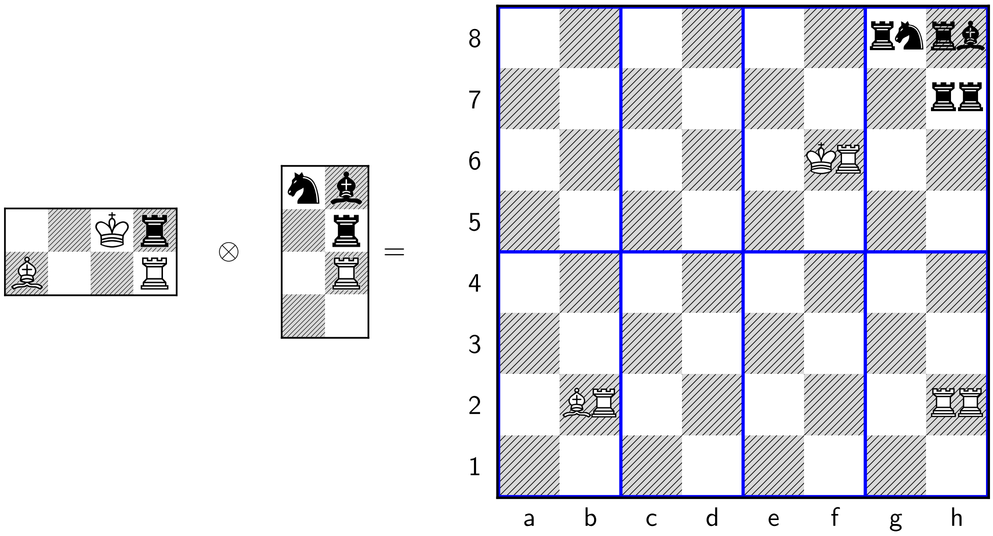
$\otimes$



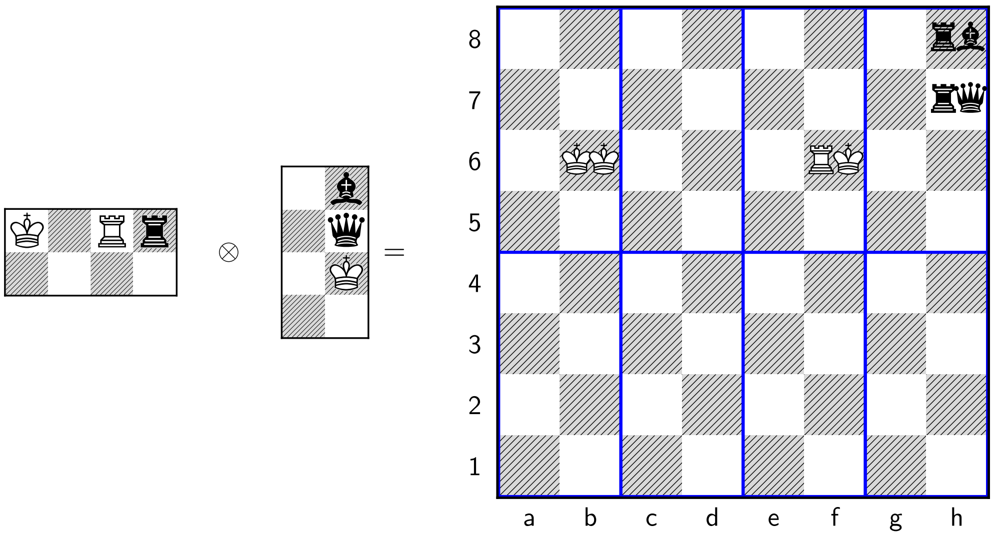
$=$



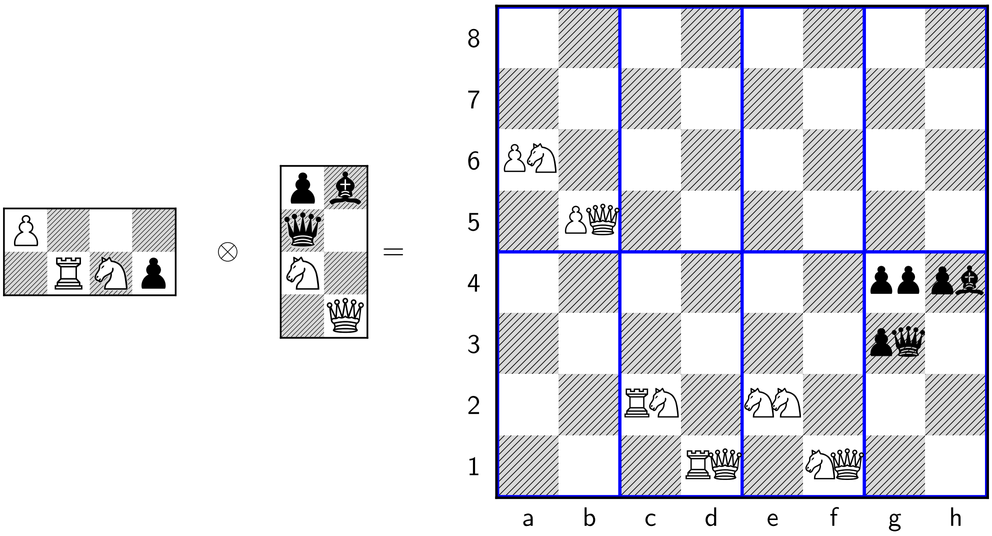
31:



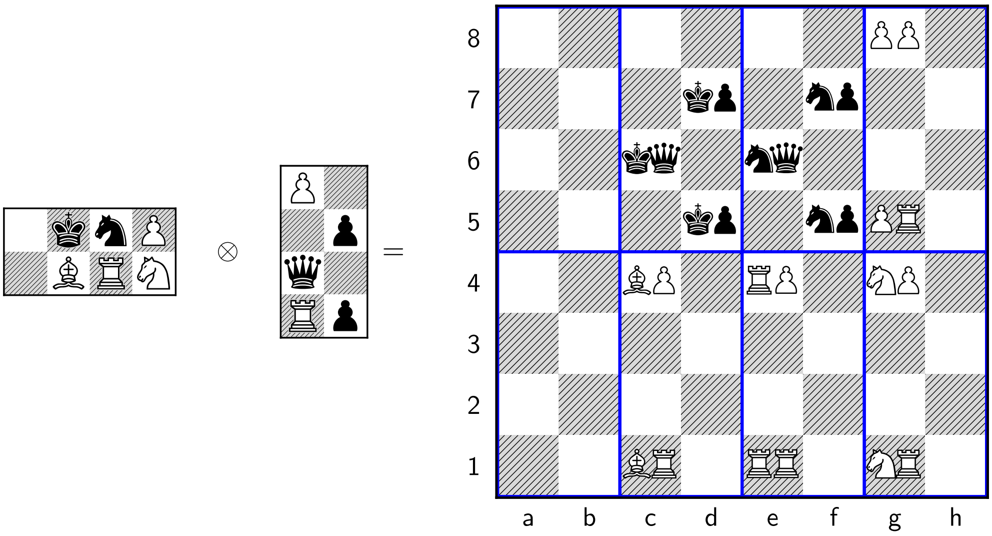
12:



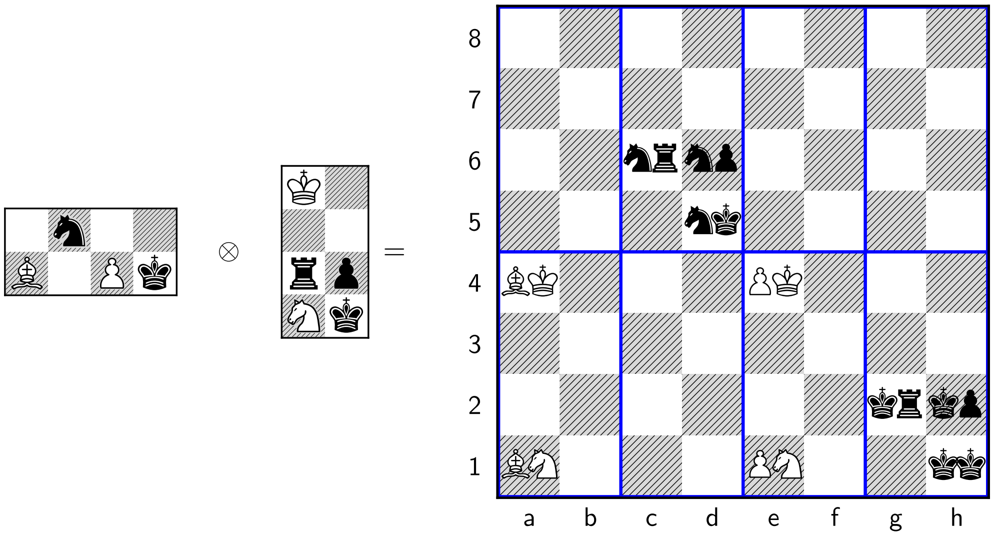
22:



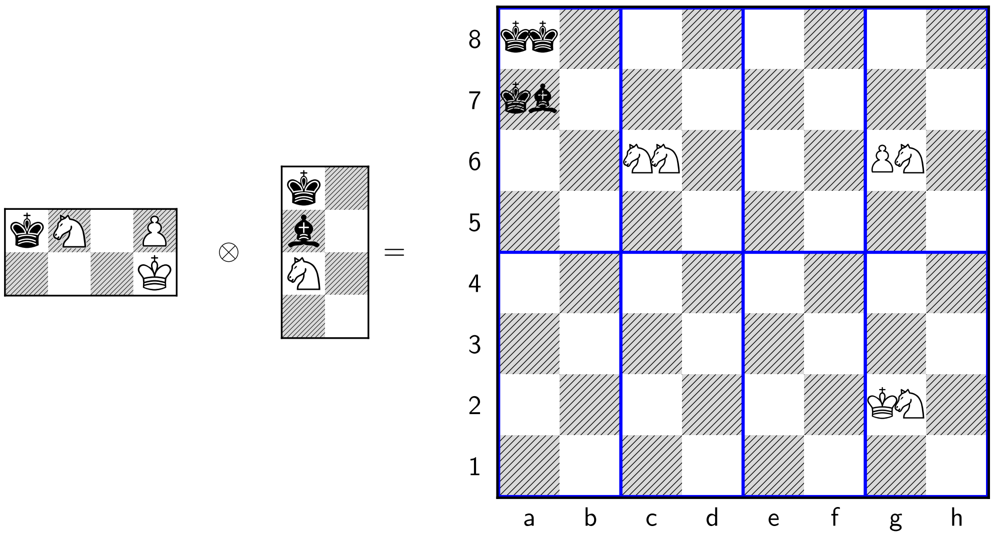
32:



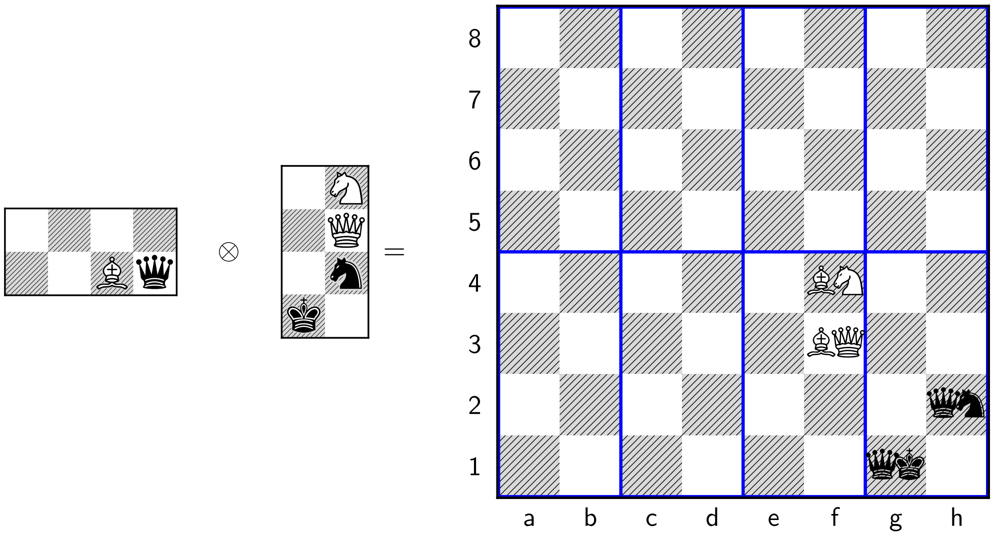
13:



23:



33:



Jetzt müssen wir also herausfinden, für welche Figuren die einzelnen Figurenprodukte stehen.

2 Multiplikationstabellen und Vorüberlegungen

Für einen besseren Überblick basteln wir uns jetzt Multiplikationstabellen, in denen wir die Figurenprodukte systematisch eintragen können:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔						
♕						
♖						
♗						
♘						
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚						
♛						
♜						
♝						
♞						
♟						

In jedem Feld soll am Ende stehen, welche Figur herauskommt, wenn wir die Figur der entsprechenden Zeile mit der der entsprechenden Spalte multiplizieren. Ins Feld oben links gehört also das Ergebnis des Produkts ♔ × ♔, rechts daneben das Ergebnis von ♔ × ♕ usw.

Rechenregel 1 liefert uns eine Information, mit der wir unseren Aufwand fast halbieren können, nämlich die Kommutativität. Beispielsweise ist ♔ × ♕ = ♕ × ♔, also sind der

Eintrag im Feld rechts neben der linken oberen Ecke und der im Feld unter der linken oberen Ecke gleich. Die Multiplikationstabellen sind also symmetrisch zur Diagonalen von links oben nach rechts unten.

Eine weitere wichtige Information liefert Regel 6, auch wenn sie zunächst etwas kryptisch klingt: *Aus jedem Stein muss man durch Multiplikation alle möglichen Steine derselben Farbe bilden können.* Übertragen auf die Tabelle bedeutet das, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Figuren vorkommen müssen (wie beim Sudoku, wo in jeder Zeile und jeder Spalte jede Zahl genau einmal vorkommen muss). Möglich wäre also beispielsweise die Zeile ♔♖♕♗♘♙, aber nicht ♔♔♕♗♘♙. Sollten wir also z. B. herausfinden, dass ♔ × ♖ = ♗ gilt, dann darf weder in der ersten Zeile noch in der dritten Spalte noch ein Läufer auftauchen.

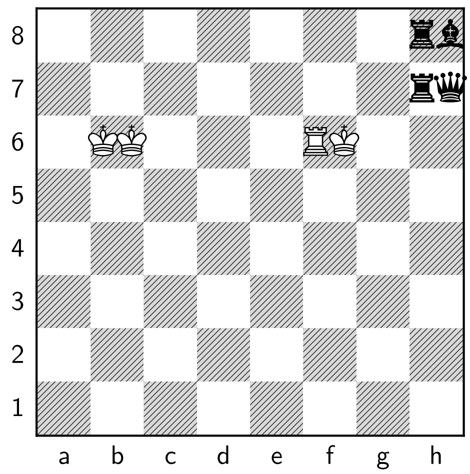
Schließlich liefern uns auch die Schachregeln weitere Zwangsbedingungen:

- Da jede Stellung legal sein muss, darf kein Bauer auf der Grundreihe stehen und auf jedem Brett muss es genau einen König pro Farbe geben. Taucht ein Figurenprodukt mehrfach auf (z. B. ♚♟ in Stellung 32), dann kann das also kein König sein.
- Weiß ist am Zug, also darf der schwarze König nicht im Schach stehen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Stellungen anpacken.

3 Ein Schritt nach dem anderen

Als Einstieg bietet sich Stellung 12 an, da sie nur vier Steine enthält. Weiß hat (neben dem König) offensichtlich nur eine Figur zum Mattsetzen zur Verfügung, sodass es gar nicht so viele mögliche Mattbilder gibt. Ein schwarzer König auf h7 kann überhaupt nicht in einem Zug mattgesetzt werden, also muss der schwarze König auf h8 stehen. Daraus folgt als einzig mögliches Mattbild ein Grundreihenmatt mit weißem König auf f6 und einer weißen Schwerfigur, die auf b8 Matt setzt. Der schwarze Stein auf h7 darf nicht in der Lage sein, dazwischenzuziehen, also kann es sich nur um Turm oder Bauer handeln.

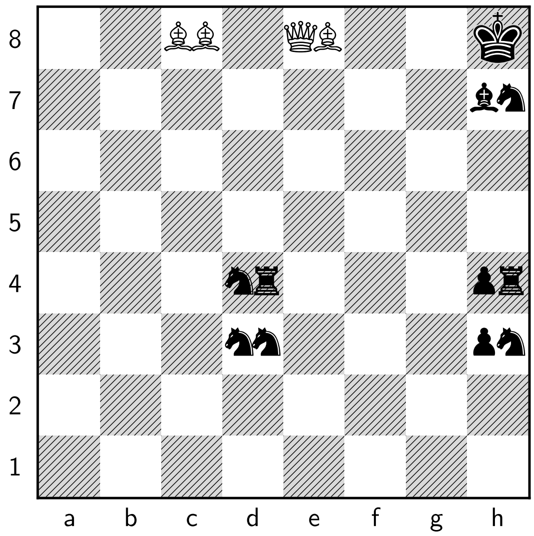


Damit wissen wir: ♖ × ♔ = ♔, ♜ × ♝ = ♚, ♔ × ♔ = ♕/♖ und ♜ × ♛ = ♜/♟ und können das in die Tabellen eintragen:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖		♔			
♕						
♖	♔					
♗						
♘						
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚						
♛			♜♟			
♜		♜♟		♚		
♝			♚			
♞						
♟						

Weiter geht es mit Stellung 11, wo wir jetzt wissen, dass auf h8 ein schwarzer König steht. Wieder hat Weiß nur zwei Figuren und es ist relativ schnell klar, dass der weiße König auf e8 stehen muss (eine andere weiße Figur auf e8 könnte nicht im nächsten Zug mattsetzen). Der Mattzug lautet also 1. ♔e8–f7 und auf c8 muss wieder eine weiße Schwerfigur stehen. Auf h7 steht diesmal eindeutig ein schwarzer Bauer (ein Turm würde den Mattzug verhindern und alles andere könnte auf die Grundreihe ziehen). Die Steine auf d4 und h4 dürfen ebenfalls nicht auf die Grundreihe zurückziehen können, also stehen auf d4 weder Dame noch Turm und auf h4 weder Dame noch Läufer. Auch der Stein auf h3 darf nicht diagonal ziehen, sonst könnte er auf c8 schlagen. Lediglich über den Stein auf d3 können wir im Moment noch keine Aussage treffen.

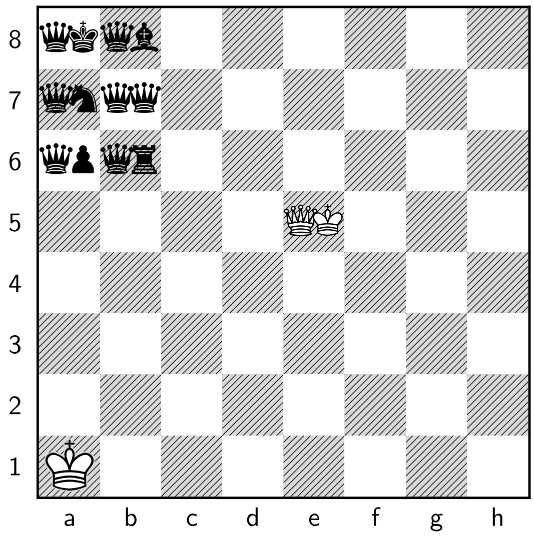


Die neuen Informationen zusammengefasst: ♕ × ♗ = ♔, ♝×♞=♟, ♗ × ♗ = ♕/♖, ♞×♜=♝/♞/♟, ♟×♜=♜/♞/♟ und ♟×♞=♜/♞/♟. Die Tabellen sehen jetzt so aus:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖		♔			
♕				♔		
♖	♔					
♗		♔		♕♖		
♘						
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚						
♛			♜♟			
♜		♜♟		♚	♝♞♟	♜♞♟
♝			♚		♟	
♞			♝♞♟	♟		♜♞♟
♟			♜♞♟		♜♞♟	

Wir sehen auch, dass wir die Auswahl für die Steine auf d4 und h3 weiter einschränken können: Da das Produkt ♝×♞ einen Bauern liefert, dürfen alle anderen Produkte mit dem schwarzen Springer keinen Bauern liefern. Also können wir die kleinen Bauern in der Springerzeile und Springerspalte gleich wieder löschen.



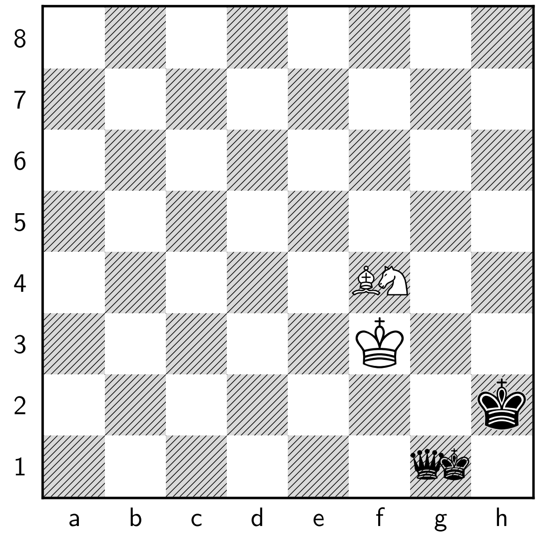
Wir machen weiter mit Stellung 21, wo wir wissen, dass auf a1 ein weißer König steht. Hier können wir uns herleiten, dass Schwarz jeden seiner Steine genau einmal besitzt (die Dame wird je einmal mit jedem Stein multipliziert). Die Suche nach möglichen Mattbildern liefert nur eine Art ersticktes Matt mit schwarzem König auf a7, der mit 1. ♘e5–c6 mattgesetzt wird. Damit c6 ungedeckt ist, darf auf b8 kein Springer und auf b7 nichts Diagonales (Bauer, Läufer, Dame) stehen. über den Stein auf b6 wissen wir bereits, dass es sich um einen Turm oder einen Bauern handeln muss. Ein Turm könnte auf c6 schlagen, also bleibt nur der Bauer übrig. Außerdem darf der weiße König nicht im Schach stehen, also steht auf a6 keine schwarze Schwerfigur.

Das liefert uns ♕ × ♔ = ♘, ♛×♞=♚, ♛×♜=♟, ♛×♝=♛/♜/♝, ♛×♛=♜/♞ und ♛×♟=♝/♞/♟. Beim Eintragen in die Tabellen streichen wir jetzt direkt alle Möglichkeiten, die durch bereits bekannte Steine in den Zeilen und Spalten verhindert werden, und erhalten:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖	♘	♔			
♕	♘			♔		
♖	♔					
♗		♔		♕♖		
♘						
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚						
♛		♜♞	♟	♛♜♝	♚	♝♞
♜		♟		♚	♝♞	♜♞
♝		♛♜♝	♚		♟	
♞		♚	♝♞	♟		♜♞
♟		♝♞	♜♞		♜♞	

Stellung 33 ist die zweite Stellung mit fast minimalem Material. Hier kennen wir mit den beiden Königen jetzt schon die Hälfte der Figuren und auch das Matt ist schnell gefunden. Dame und Läufer würden von f4 aus Schach bieten, also dürfen dort nur Turm, Springer oder Bauer stehen und von diesen kann nur der Turm im nächsten Zug mattsetzen (1. ♖f4–h4#). Für den schwarzen Stein auf g1 sind König und Bauer aufgrund der Schachregeln verboten und ein Springer böte dem weißen König Schach. Bleiben also Dame, Turm oder Läufer.



Also gilt ♗ × ♘ = ♖ und ♛×♚=♛/♜/♝ und wir tragen das wieder in die Tabellen ein:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖	♘	♔			
♕	♘			♔		
♖	♔					
♗		♔		♕♖	♖	
♘				♖		
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚		♛♜♝				
♛	♛♜♝	♜♞	♟	♛♜♝	♚	♝♞
♜		♟		♚	♝♞	♜♞
♝		♛♜♝	♚		♟	
♞		♚	♝♞	♟		♜♞
♟		♝♞	♜♞		♜♞	

An dieser Stelle lohnt sich ein genauerer Blick auf die Tabellen: Der gerade ermittelte Turm lässt für das Produkt ♗ × ♗ als Ergebnis nur die Dame zu. Wenn wir versuchen, die restlichen weißen Könige zu platzieren, lässt uns die Tabelle nur die Möglichkeiten ♘ × ♘ = ♙ × ♙ = ♔ und ♘ × ♙ = ♙ × ♘ = ♔. Wir wissen, dass auf jedem Brett ein König stehen muss und in Stellung 13 existiert von diesen Möglichkeiten nur das Produkt ♙ × ♘, also ist das der weiße König.

Versuchen wir jetzt, die restlichen schwarzen Könige zu platzieren. Die Tabelle gibt uns zwei Möglichkeiten: ♚×♟=♟×♚=♚ oder ♚×♚=♟×♟=♚. Wir wissen, dass auf jedem Brett ein schwarzer König stehen muss und in Stellung 22 gibt es von diesen Möglichkeiten nur das Produkt ♟×♟.

In der schwarzen Tabelle können wir aber noch mehr Schlüsse ziehen: Für die restlichen schwarzen Bauern bleiben jetzt nur die Felder ♚×♟ und ♟×♚ übrig. Daraufhin sehen wir, dass die schwarze Dame in der Bauernspalte nur im Feld ♝×♟ stehen kann.

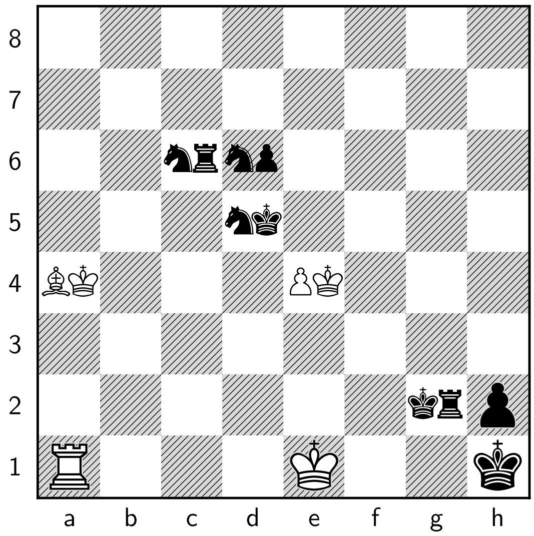
Für die restlichen drei Felder der Bauernspalte haben wir die Möglichkeiten ♝♞, ♜♞ und ♜♞. Würde das Produkt ♛×♟ den Springer liefern, dann bliebe sowohl für ♜×♟ als auch für ♞×♟ nur der Turm übrig und das ist nicht erlaubt. Also muss ♛×♟ den Läufer ergeben.

In der Läuferzeile bleibt für das Produkt ♝×♛ jetzt nur noch der Turm übrig und somit muss das Produkt ♚×♛ wiederum die Dame liefern. In das letzte freie Feld der Damenzeile gehört nun der Springer und für die verbleibenden zwei Damen finden wir nur noch die Felder ♜×♜ und ♞×♞:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖	♘	♔			
♕	♘			♔		
♖	♔					
♗		♔		♕	♖	
♘				♖		♔
♙					♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛				♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜		♟	♛	♚	♝♞	♜♞
♝		♜	♚		♟	♛
♞		♚	♝♞	♟	♛	♜♞
♟	♟	♝	♜♞	♛	♜♞	♚

Gehen wir kurz zurück zu Stellung 13: Der schwarze König hat das Fluchtfeld g1, also kommt nur ein Matt entlang der Grundreihe in Frage, entweder mit 1. ♔e1–f2# oder mit 1. O-O-O#. Damit der Stein auf g2 nicht dazwischenziehen kann, muss er gefesselt sein, also steht auf e4 entweder eine weiße Dame oder ein weißer Läufer. Auf c6 steht laut Tabelle ein Springer oder ein Läufer; beides sollte nicht und darf auch nicht auf die Grundreihe ziehen, um das Matt abzuwehren. Auch der Stein auf d5 darf nicht dazwischenziehen können, also ist es ebenfalls Springer oder Läufer (Bauern werden von der Tabelle verboten).



Daraus folgt ♙ × ♔ = ♕/♗ und ♞×♚=♝/♞ und somit für die Tabelle:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♕♖	♘	♔			♕♗
♕	♘			♔		
♖	♔					
♗		♔		♕	♖	
♘				♖		♔
♙	♕♗				♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛			♝♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜		♟	♛	♚	♝♞	♜♞
♝		♜	♚		♟	♛
♞	♝♞	♚	♝♞	♟	♛	♜♞
♟	♟	♝	♜♞	♛	♜♞	♚

Wieder lohnt sich ein genauerer Blick auf die Tabellen: Die Information, dass auf e4 etwas Diagonales stehen muss, lässt dem weißen Turm in der Königszeile nur die linke obere Ecke, also ist ♔ × ♔ = ♖.

Noch mehr geht bei den schwarzen Steinen, denn mit der Information, dass auf d5 kein Turm steht, können wir jetzt die komplette Multiplikationstabelle für die schwarzen Figuren ermitteln:

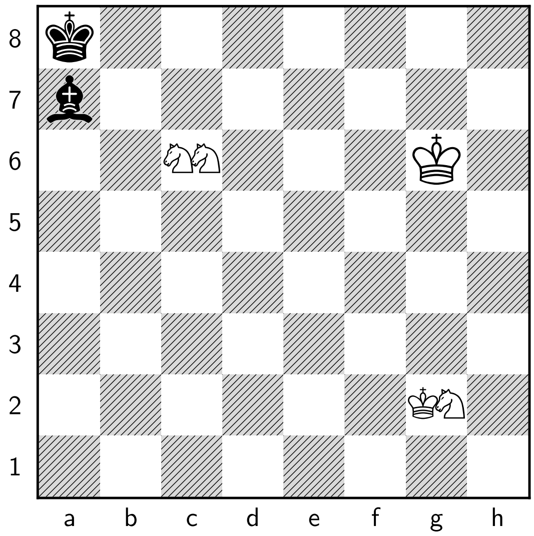
- In Springerzeile stehen jetzt noch ♝♞, ♝♞ und ♜♞, also ist ♞ × ♟ = ♜.
- Aus ♞ × ♟ = ♜ folgt sofort ♜ × ♟ = ♞.
- Aus ♜ × ♟ = ♞ folgt direkt ♜ × ♞ = ♝.
- Aus ♜ × ♞ = ♝ folgt direkt ♚ × ♞ = ♞.
- In der Turmzeile ist nur noch ein Feld frei, somit ist ♜ × ♚ = ♜.
- Jetzt gibt es nur noch ein freies Feld in der Königsspalte, also ist ♝ × ♚ = ♝.
- Schließlich bleibt für das letzte freie Feld noch ♝ × ♝ = ♞.

Uns fehlen jetzt also nur noch die weißen Figuren.

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♖	♘	♔			♕♗
♕	♘			♔		
♖	♔					
♗		♔		♕	♖	
♘				♖		♔
♙	♕♗				♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜	♜	♟	♛	♚	♝	♞
♝	♝	♜	♚	♞	♟	♛
♞	♞	♚	♝	♟	♛	♜
♟	♟	♝	♞	♛	♜	♚

Stellung 23 ist relativ überschaubar; hier bietet sich ein Matt durch Abzug auf der langen Diagonalen an. Auf g2 steht also eine Dame oder ein Läufer und wir können mit 1. ♖c6–c8 oder 1. c6-c7 mattsetzen. Die Tabelle verbietet uns die erste Möglichkeit, also steht auf c6 ein Bauer.



Daraus folgt ♘ × ♘ = ♙ und ♔ × ♘ = ♕/♗.

Da in der Königszeile jetzt in zwei von drei freien Feldern das Paar ♕♗ auftritt, können wir im Feld ♔×♗ gleich den Bauern eintragen. Als nächstes schauen wir in die Springerzeile und stellen fest, dass es für den Springer nur noch ein Feld gibt, nämlich ♘ × ♖ = ♘. Dadurch kann im Feld ♗ × ♖ nur der Läufer stehen und somit gehört ins Feld ♗ × ♙ wieder der Springer.

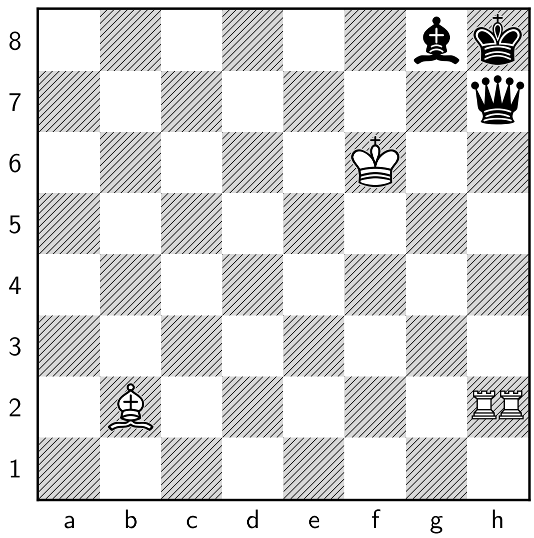
	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♖	♘	♔	♙	♕♗	♕♗
♕	♘			♔		
♖	♔			♗	♘	
♗	♙	♔	♗	♕	♖	♘
♘	♕♗		♘	♖	♙	♔
♙	♕♗			♘	♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜	♜	♟	♛	♚	♝	♞
♝	♝	♜	♚	♞	♟	♛
♞	♞	♚	♝	♟	♛	♜
♟	♟	♝	♞	♛	♜	♚

Bevor wir uns den volleren Stellungen widmen, werfen wir noch kurz einen Blick auf Stellung 31: Wieder drängt sich ein Diagonalmatt auf, indem der weiße König mit 1. ♔f6–g5 aus der Schusslinie des Läufers zieht. Um die Verteidigung 1… ♕g7 auszuschalten, benötigen wir auf h2 eine weiße Schwerfigur, die die schwarze Dame fesselt.

Daraus schließen wir also ♖ × ♖ = ♕/♖, was uns eine weiteren Nebeneintrag für die Tabelle liefert:

Auf den ersten Blick hält sich dieser Erkenntnisgewinn in Grenzen, aber er wird uns gleich helfen.

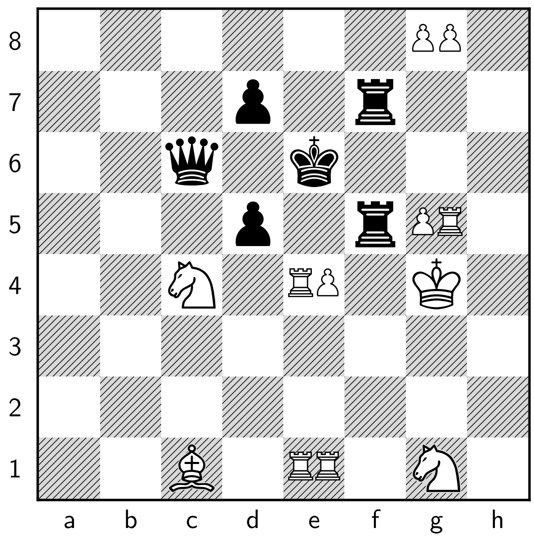


	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♖	♘	♔	♙	♕♗	♕♗
♕	♘			♔		
♖	♔		♕♖	♗	♘	
♗	♙	♔	♗	♕	♖	♘
♘	♕♗		♘	♖	♙	♔
♙	♕♗			♘	♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜	♜	♟	♛	♚	♝	♞
♝	♝	♜	♚	♞	♟	♛
♞	♞	♚	♝	♟	♛	♜
♟	♟	♝	♞	♛	♜	♚

Gehen wir nämlich weiter zu Stellung 32, so finden wir die gerade identifizierte Schwerfigur auf e1 wieder. Laut Tabelle dürften auf e4 Dame, Turm oder Bauer stehen; die Schachregeln verbieten jedoch eine Schwerfigur (sonst stünde Schwarz im Schach). Also stehen auf e4 und g5 weiße Bauern und Weiß kann mit dem hübschen Doppelschach 1. e4×f5++ mattsetzen.

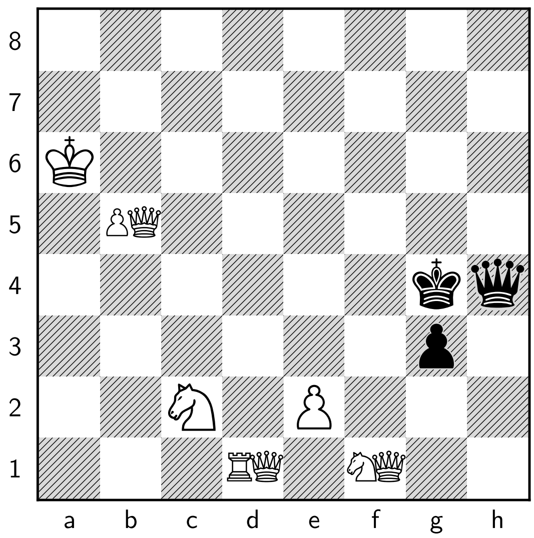
Das Ergebnis ♖ × ♙ = ♙ tragen wir wieder in die Tabelle ein, wo wir feststellen, dass der letzte weiße Bauer zum Produkt ♕ × ♕ gehört:



	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♖	♘	♔	♙	♕♗	♕♗
♕	♘	♙		♔		
♖	♔		♕♖	♗	♘	♙
♗	♙	♔	♗	♕	♖	♘
♘	♕♗		♘	♖	♙	♔
♙	♕♗		♙	♘	♔	

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜	♜	♟	♛	♚	♝	♞
♝	♝	♜	♚	♞	♟	♛
♞	♞	♚	♝	♟	♛	♜
♟	♟	♝	♞	♛	♜	♚

Zum Abschluss knöpfen wir uns Stellung 22 vor. Die drei Unbekannten sind laut Tabelle Dame, Turm und Läufer, wobei auf d1 eine Schwerfigur und auf f1 entweder Dame oder Läufer stehen müssen. Nach dem Prinzip „Wünsch dir was“ fällt relativ schnell ein Matt mit der Dame auf f5 ins Auge, aber das steht im Widerspruch zu den gerade genannten Bedingungen: Für das Matt müssten beide Schwerfiguren f5 kontrollieren, aber dann kann nicht mehr wie verlangt eine davon auf d1 stehen.



Wenn wir uns die möglichen Fluchtfelder des schwarzen König anschauen, erscheint es sinnvoll, die zweite Schwerfigur auf b5 zu platzieren, damit der König nicht über die 5. Reihe abhaut. Damit bleibt für f1 der Läufer übrig, der dem schwarzen König das Feld h3 nimmt. 1. ♘c2–e3+ sieht nett aus, aber der König hat noch das Feld f4, also müsste jetzt die zündende Idee kommen: Die Schwerfigur auf b5 ist der Turm, die Dame steht auf d1 und wir können mit 1. e2–e3# mattsetzen!

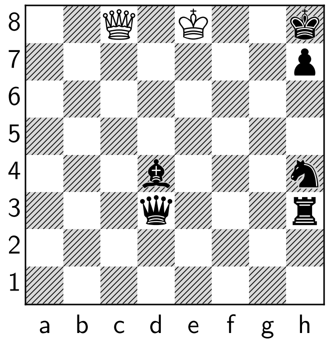
Wir erhalten also ♕ × ♖ = ♕, ♕ × ♘ = ♗ und ♕ × ♙ = ♖ und damit wissen wir genug, um die Tabelle zu vervollständigen:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔	♖	♘	♔	♙	♕♗	♕♗
♕	♘	♙	♕	♔	♗	♖
♖	♔	♕	♕♖	♗	♘	♙
♗	♙	♔	♗	♕	♖	♘
♘	♕♗	♗	♘	♖	♙	♔
♙	♕♗	♖	♙	♘	♔	

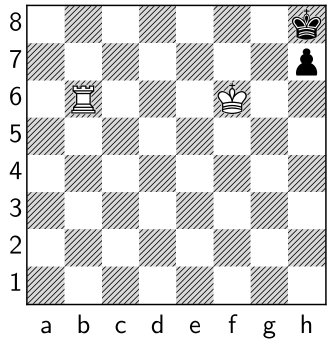
	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♛	♛	♞	♟	♜	♚	♝
♜	♜	♟	♛	♚	♝	♞
♝	♝	♜	♚	♞	♟	♛
♞	♞	♚	♝	♟	♛	♜
♟	♟	♝	♞	♛	♜	♚

- In der Turmzeile bleibt für das letzte freie Feld nur der Turm.
- In der Springerzeile bleibt für das letzte freie Feld nur die Dame.
- Daraus folgt direkt ♔ × ♙ = ♗.
- Und schließlich muss in der rechten unteren Ecke wieder eine Dame stehen.

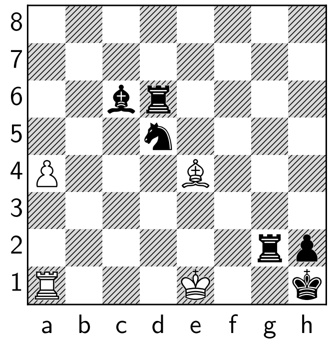
4 Die Lösung auf einen Blick



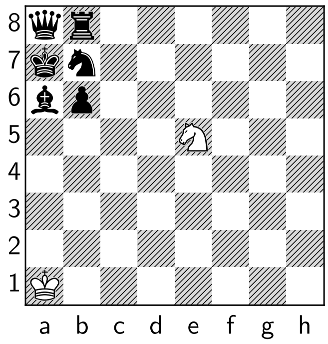
Ke8–f7#



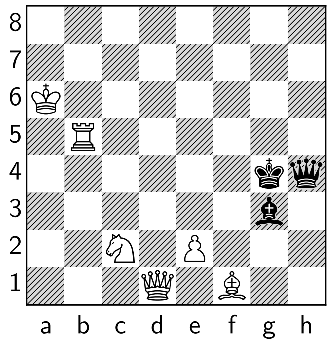
Rb6–b8#



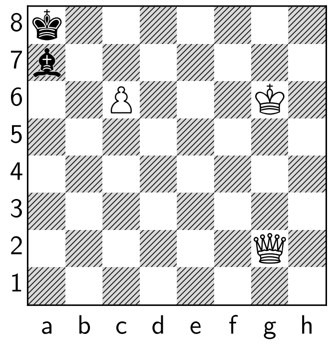
O-O-O#



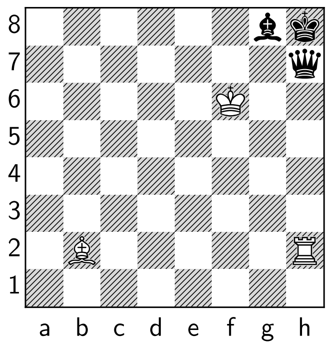
Ne5–c6#



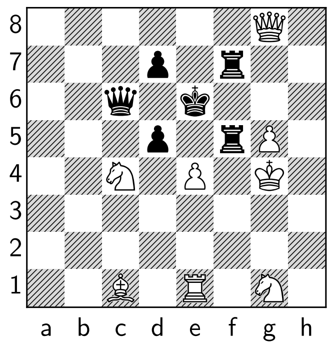
e2-e3#



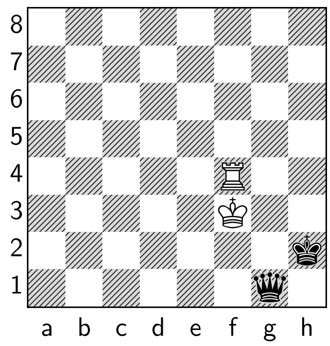
c6–c7#



Kf6–g5#



e4×f5#



Rf4–h4#

Da das Rätsel aus dem Vereinigten Königreich kommt, ist es sinnvoll, die Lösungszüge in der englischen Notation aufzuschreiben. Liest man die Anfangsbuchstaben der Mattzüge von links oben nach rechts unten, ergibt sich das Lösungswort: **KRONECKER**.