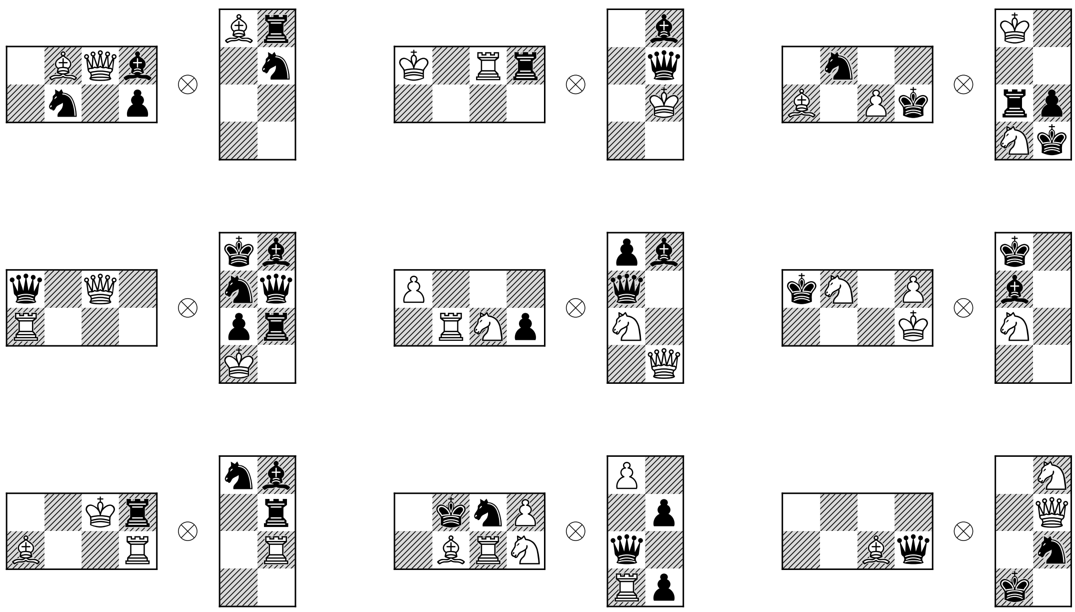
GCHQ-Weihnachtsrätsel 2015

Die Aufgabe

Das Original findet sich im Abschnitt „Algebraic“ auf dieser Seite: `https://www.gchq.gov.uk/information/director-gchqs-christmas-puzzle-part-5`.



$$\text{Weiß am Zug setzt Matt in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\,\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\,\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

1. (Figuren-)Multiplikation ist kommutativ: ♗ × ♖ = ♖ × ♗
2. Multiplikation mit einem leeren Feld ergibt ein leeres Feld.
3. Weißer Stein mal weißer Stein ergibt einen weißen Stein.
4. Schwarzer Stein mal schwarzer Stein ergibt einen schwarzen Stein.
5. Weißer Stein mal schwarzer Stein ergibt ein leeres Feld.
6. Aus jedem Stein muss man durch Multiplikation alle möglichen Steine derselben Farbe bilden können.

Jede Multiplikation liefert dabei eine legale Stellung, in der Weiß am Zug ist und in einem Zug mattsetzen kann. Dabei zieht Weiß immer von unten nach oben.

1 Kronecker-Produkt

In der Mathematik ist das Kronecker-Produkt zweier Matrizen[1] folgendermaßen definiert (die gestrichelten Linien sollen der Orientierung dienen, haben aber keine Bedeutung):

$$\begin{pmatrix} 1 & {\color{blue}3} \\ {\color{red}2} & {\color{green}4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1\cdot 1 & 1\cdot 4 & {\color{blue}3\cdot 1} & {\color{blue}3\cdot 4} \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 5 & {\color{blue}3\cdot 2} & {\color{blue}3\cdot 5} \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 6 & {\color{blue}3\cdot 3} & {\color{blue}3\cdot 6} \\ \hdashline {\color{red}2\cdot 1} & {\color{red}2\cdot 4} & {\color{green}4\cdot 1} & {\color{green}4\cdot 4} \\ {\color{red}2\cdot 2} & {\color{red}2\cdot 5} & {\color{green}4\cdot 2} & {\color{green}4\cdot 5} \\ {\color{red}2\cdot 3} & {\color{red}2\cdot 6} & {\color{green}4\cdot 3} & {\color{green}4\cdot 6} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 6 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 2 & 8 & 4 & 16 \\ 4 & 10 & 8 & 20 \\ 6 & 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Es wird also jede Zahl der ersten Matrix mit jeder Zahl der zweiten Matrix multipliziert und die Ergebnisse anhand der Reihenfolge in der ersten Matrix sortiert.[2]

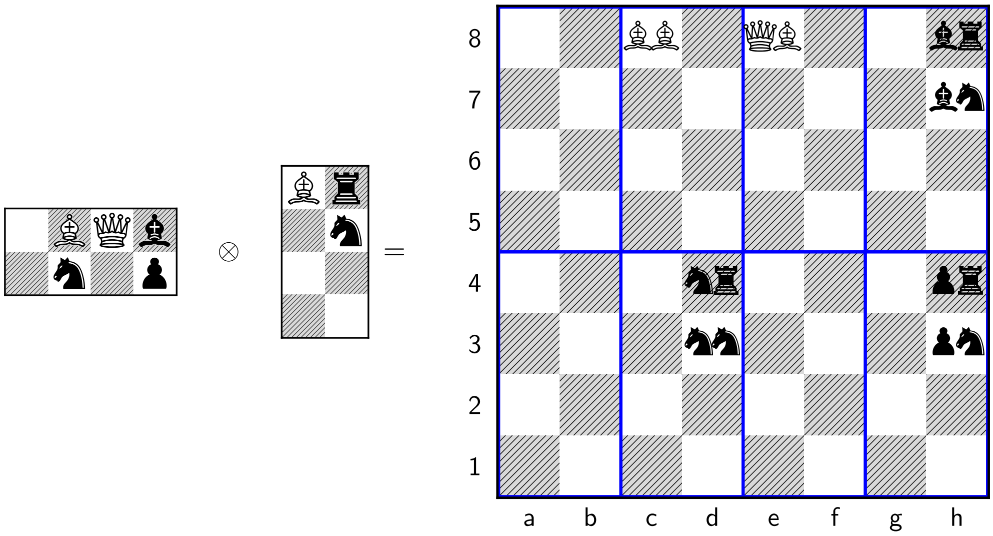
Wenden wir diese Definition und die Multiplikationsregeln auf die neun Schachbrettprodukte an, erhalten wir folgende Stellungen:[3]

[1] „Matrix“ ist ein Science-Fiction-Film mit Keanu Reeves; *eine* Matrix ist eine zweidimensionale Anordnung von Zahlen, mit denen Mathematiker, Informatiker, Ingenieure und andere Nerds viele lustige Sachen anstellen können.

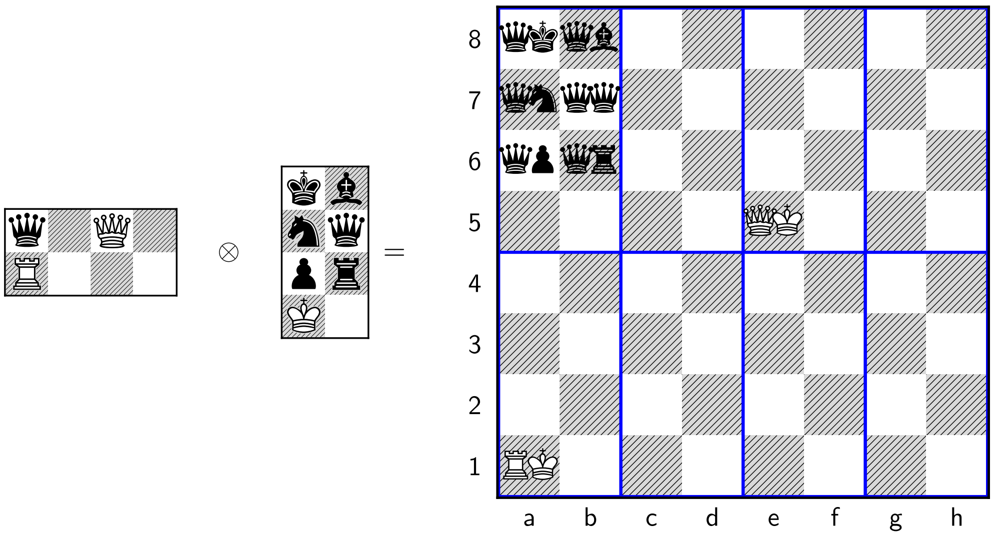
[2] Wer Lust hat, kann ja mal überprüfen, ob diese Multiplikation kommutativ ist, also ob die Rechnung $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ das gleiche Ergebnis liefert.

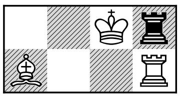
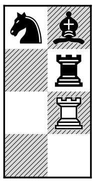
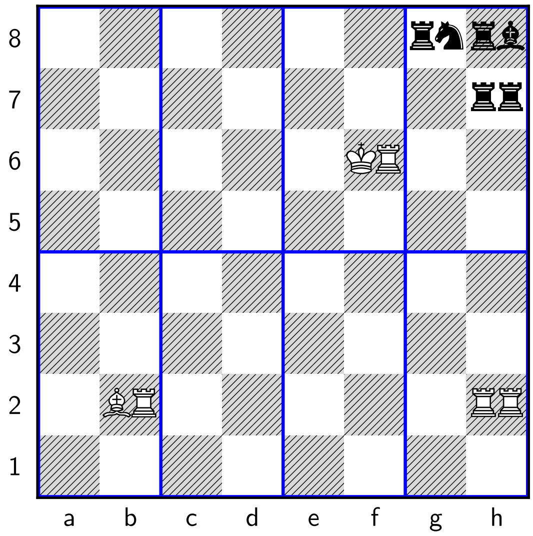
[3] Die Nummerierung folgt dabei dem Schema $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$, also erst Zeile, dann Spalte.

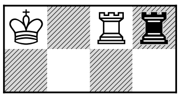
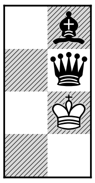
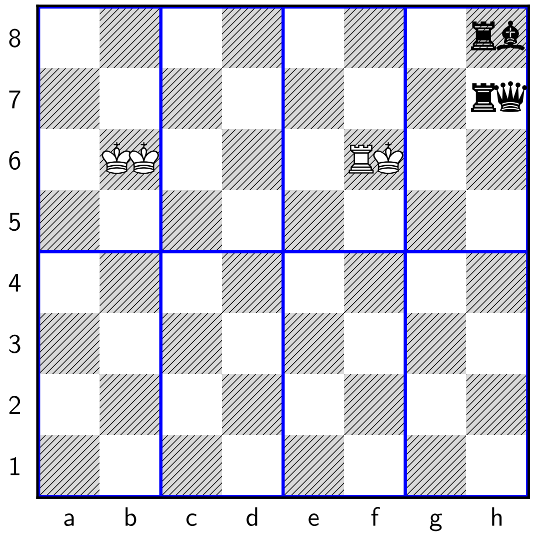
11:



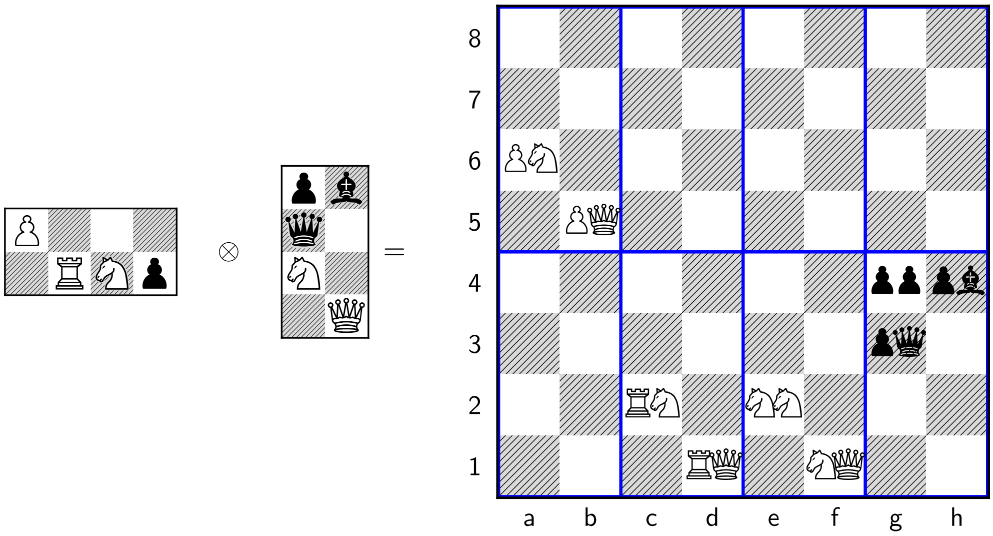
21:



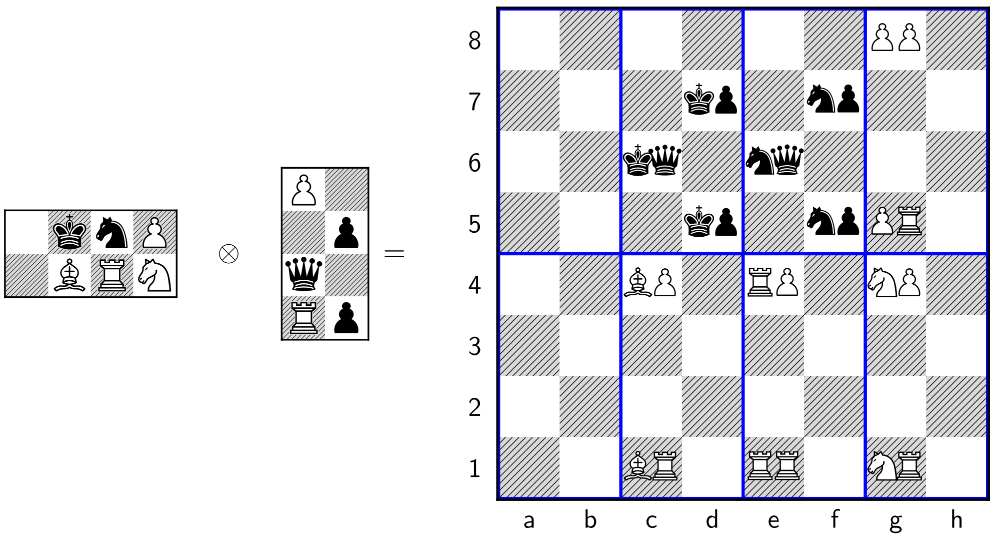
31:  $\otimes$  $=$ 

12:  $\otimes$  $=$ 

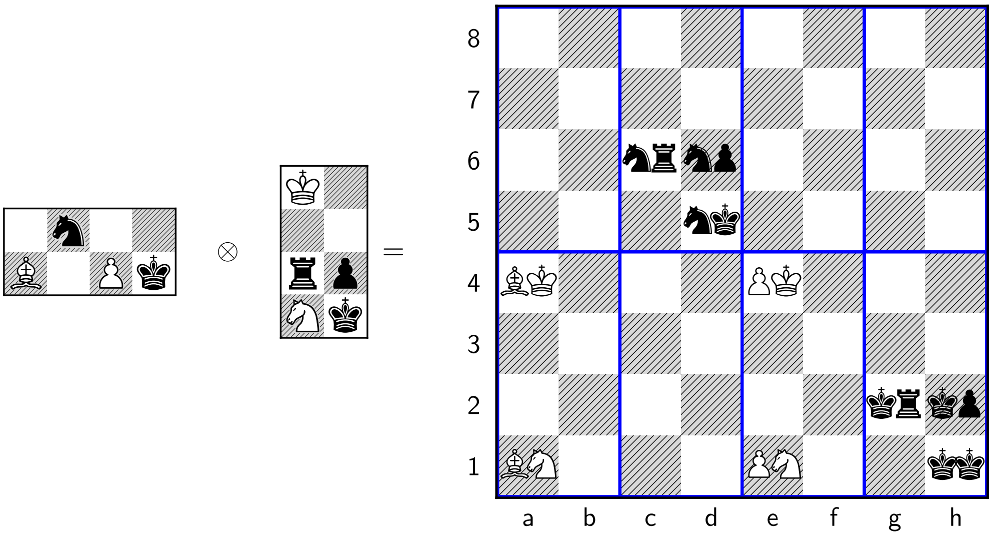
22:



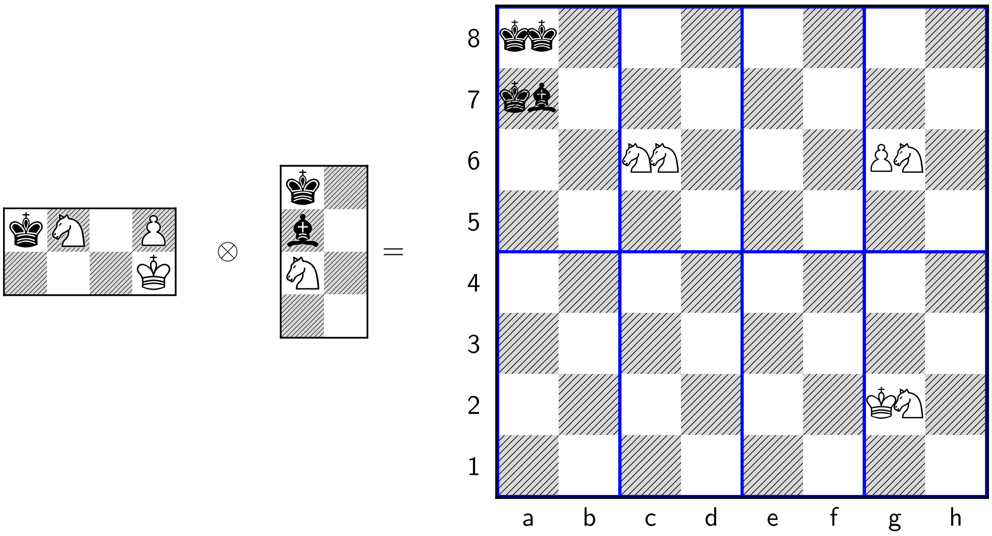
32:

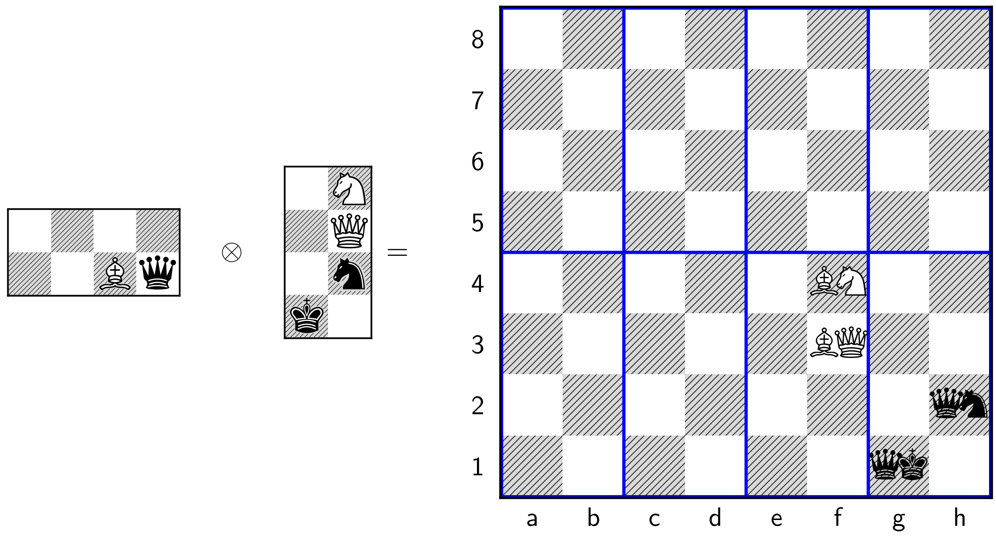


13:



23:



33: 

Jetzt müssen wir also herausfinden, für welche Figuren die einzelnen Figurenprodukte stehen.

2 Multiplikationstabellen und Vorüberlegungen

Für einen besseren Überblick basteln wir uns jetzt Multiplikationstabellen, in denen wir die Figurenprodukte systematisch eintragen können:

	♔	♕	♖	♗	♘	♙
♔						
♕						
♖						
♗						
♘						
♙						

	♚	♛	♜	♝	♞	♟
♚						
♛						
♜						
♝						
♞						
♟						

In jedem Feld soll am Ende stehen, welche Figur herauskommt, wenn wir die Figur der entsprechenden Zeile mit der der entsprechenden Spalte multiplizieren. Ins Feld oben links gehört also das Ergebnis des Produkts ♔ × ♔, rechts daneben das Ergebnis von ♔ × ♕ usw.

Rechenregel 1 liefert uns eine Information, mit der wir unseren Aufwand fast halbieren können, nämlich die Kommutativität. Beispielsweise ist ♔ × ♕ = ♕ × ♔, also sind der

Eintrag im Feld rechts neben der linken oberen Ecke und der im Feld unter der linken oberen Ecke gleich. Die Multiplikationstabellen sind also symmetrisch zur Diagonalen von links oben nach rechts unten.

Eine weitere wichtige Information liefert Regel 6, auch wenn sie zunächst etwas kryptisch klingt: *Aus jedem Stein muss man durch Multiplikation alle möglichen Steine derselben Farbe bilden können.* Übertragen auf die Tabelle bedeutet das, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Figuren vorkommen müssen (wie beim Sudoku, wo in jeder Zeile und jeder Spalte jede Zahl genau einmal vorkommen muss). Möglich wäre also beispielsweise die Zeile ♔♖♕♗♘♙, aber nicht ♔♔♕♗♘♙. Sollten wir also z. B. herausfinden, dass ♔ × ♖ = ♗ gilt, dann darf weder in der ersten Zeile noch in der dritten Spalte noch ein Läufer auftauchen.

Schließlich liefern uns auch die Schachregeln weitere Zwangsbedingungen:

- Da jede Stellung legal sein muss, darf kein Bauer auf der Grundreihe stehen und auf jedem Brett muss es genau einen König pro Farbe geben. Taucht ein Figurenprodukt mehrfach auf (z. B. ♚♟ in Stellung 32), dann kann das also kein König sein.
- Weiß ist am Zug, also darf der schwarze König nicht im Schach stehen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Stellungen anpacken.