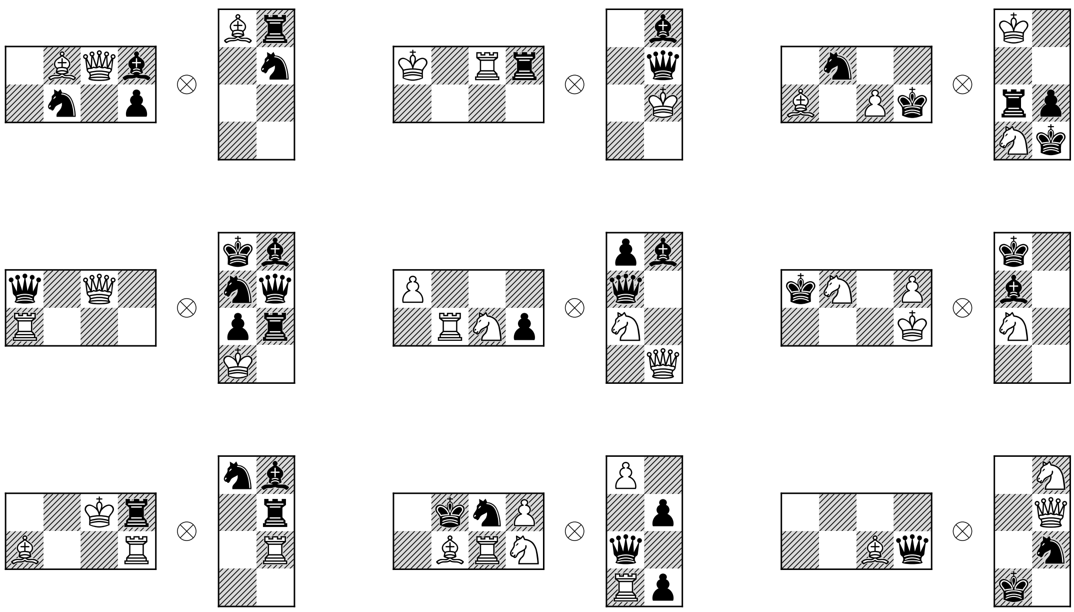
GCHQ-Weihnachtsrätsel 2015

Die Aufgabe

Das Original findet sich im Abschnitt „Algebraic“ auf dieser Seite: `https://www.gchq.gov.uk/information/director-gchqs-christmas-puzzle-part-5`.



$$\text{Weiß am Zug setzt Matt in } \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\,\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\,\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\,\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

1. (Figuren-)Multiplikation ist kommutativ: ♗ × ♖ = ♖ × ♗
2. Multiplikation mit einem leeren Feld ergibt ein leeres Feld.
3. Weißer Stein mal weißer Stein ergibt einen weißen Stein.
4. Schwarzer Stein mal schwarzer Stein ergibt einen schwarzen Stein.
5. Weißer Stein mal schwarzer Stein ergibt ein leeres Feld.
6. Aus jedem Stein muss man durch Multiplikation alle möglichen Steine derselben Farbe bilden können.

Jede Multiplikation liefert dabei eine legale Stellung, in der Weiß am Zug ist und in einem Zug mattsetzen kann. Dabei zieht Weiß immer von unten nach oben.

1 Kronecker-Produkt

In der Mathematik ist das Kronecker-Produkt zweier Matrizen[1] folgendermaßen definiert (die gestrichelten Linien sollen der Orientierung dienen, haben aber keine Bedeutung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1\cdot 1 & 1\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 4 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 5 & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 6 & 3\cdot 3 & 3\cdot 6 \\ \hdashline 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 4\cdot 1 & 4\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 5 & 4\cdot 2 & 4\cdot 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 & 4\cdot 3 & 4\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 6 & 15 \\ 3 & 6 & 9 & 18 \\ 2 & 8 & 4 & 16 \\ 4 & 10 & 8 & 20 \\ 6 & 12 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

Es wird also jede Zahl der ersten Matrix mit jeder Zahl der zweiten Matrix multipliziert und die Ergebnisse anhand der Reihenfolge in der ersten Matrix sortiert.[2]

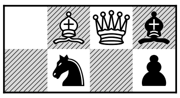
Wenden wir diese Definition und die Multiplikationsregeln auf die neun Schachbrettprodukte an, erhalten wir folgende Stellungen:[3]

[1] „Matrix“ ist ein Science-Fiction-Film mit Keanu Reeves; *eine* Matrix ist eine zweidimensionale Anordnung von Zahlen, mit denen Mathematiker, Informatiker, Ingenieure und andere Nerds viele lustige Sachen anstellen können.

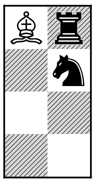
[2] Wer Lust hat, kann ja mal überprüfen, ob diese Multiplikation kommutativ ist, also ob die Rechnung $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ das gleiche Ergebnis liefert.

[3] Die Nummerierung folgt dabei dem Schema $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$, also erst Zeile, dann Spalte.

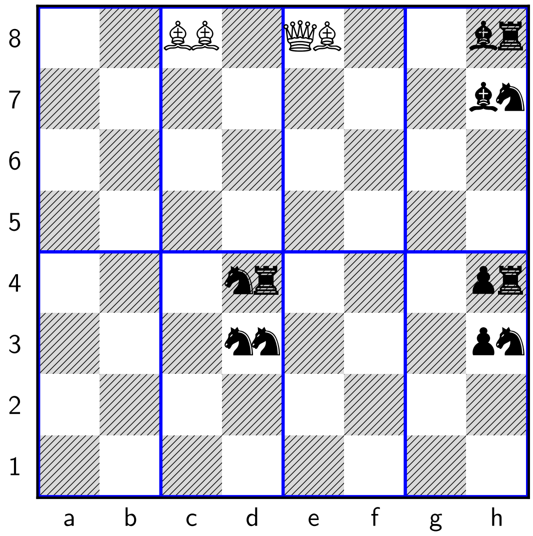
11:



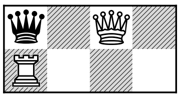
$\otimes$



$=$

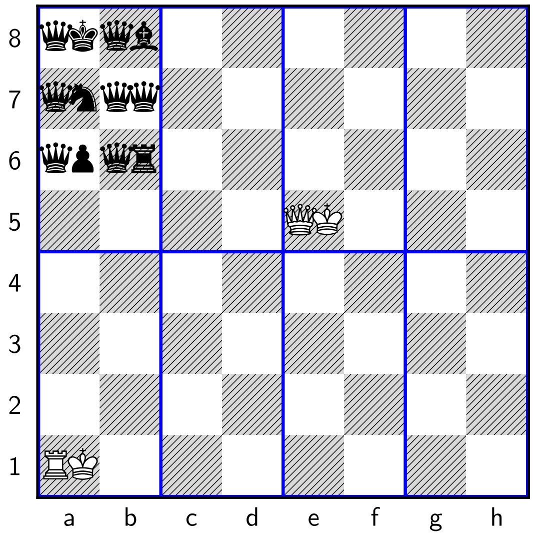


21:

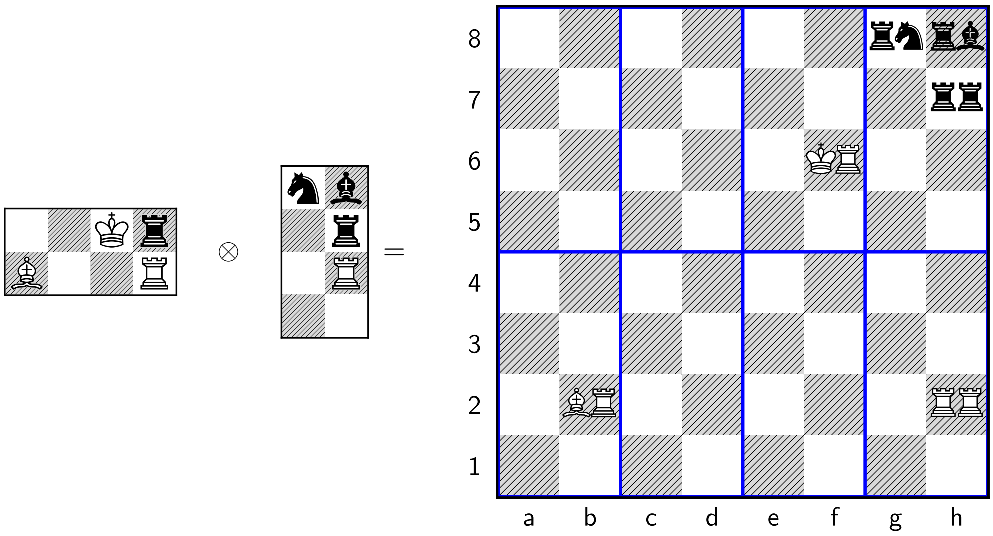


$\otimes$

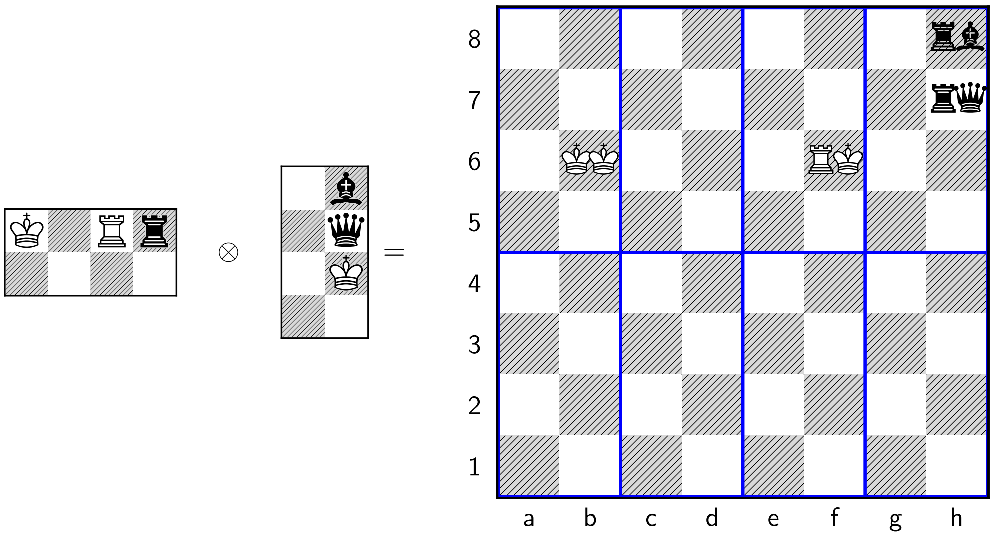
$=$



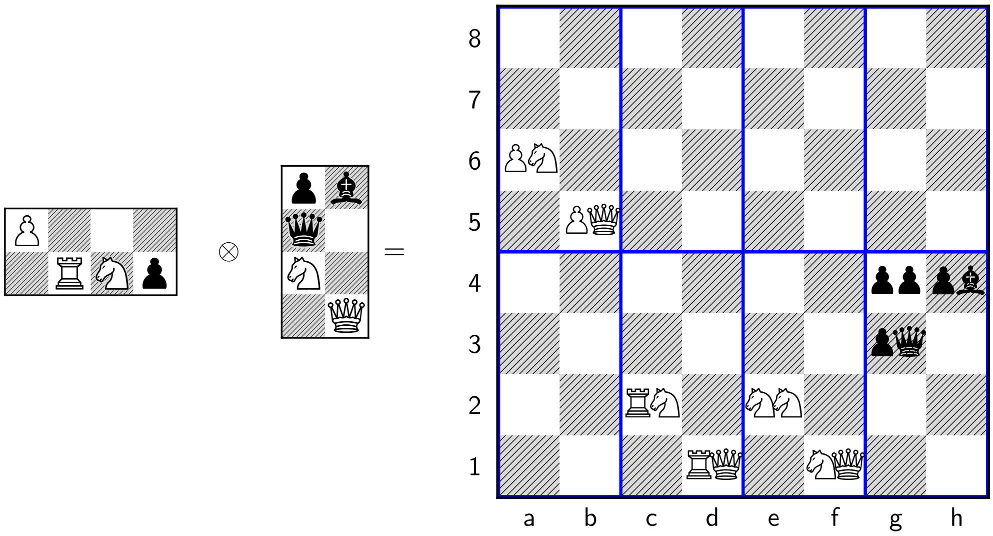
31:



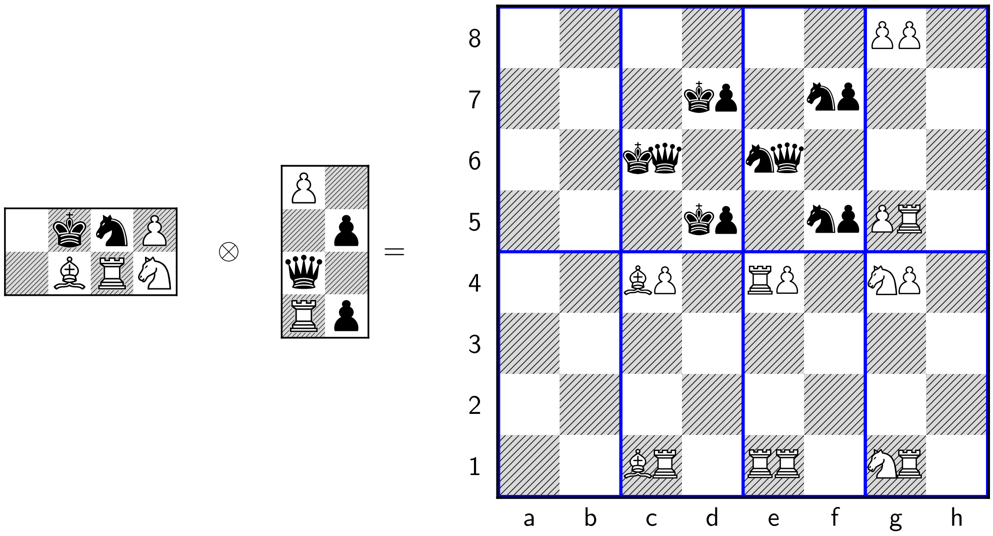
12:



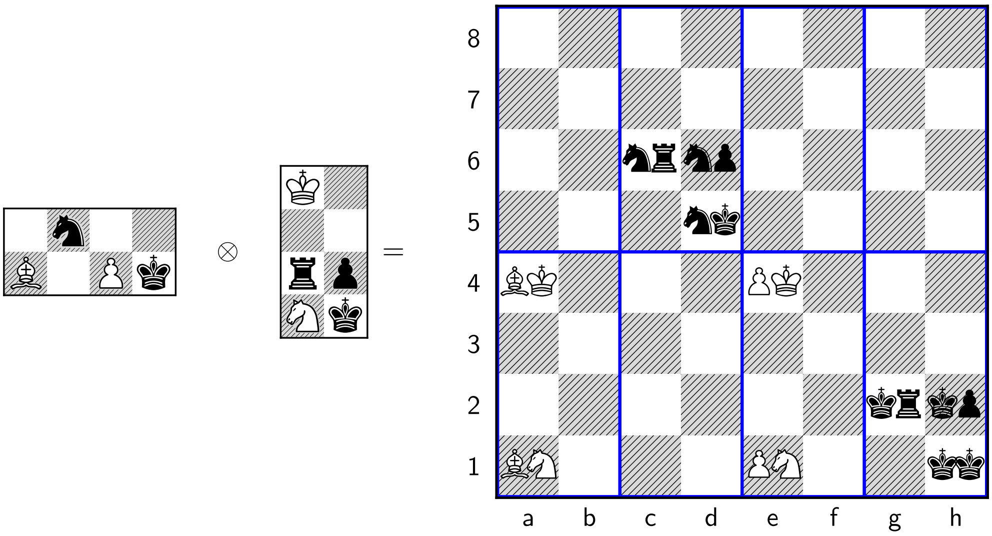
22:



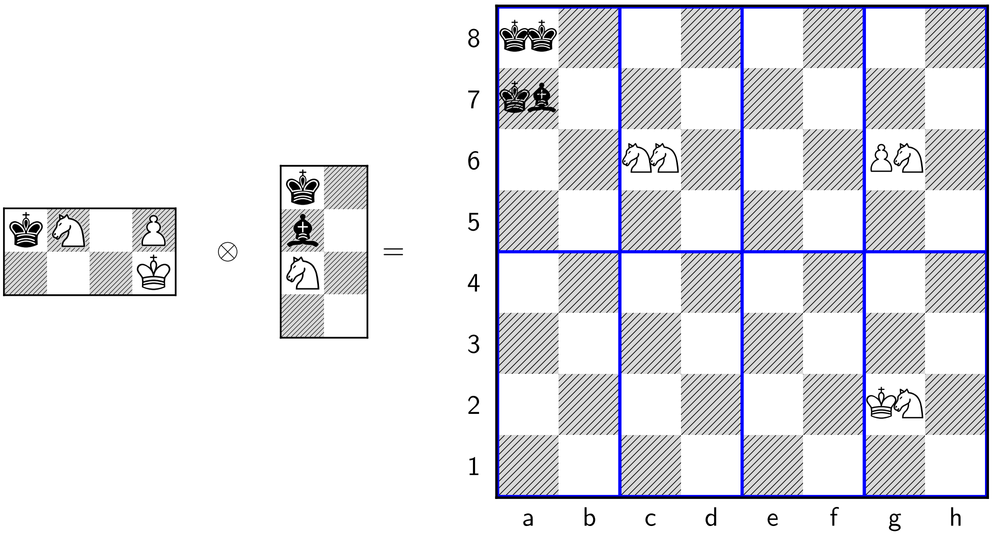
32:



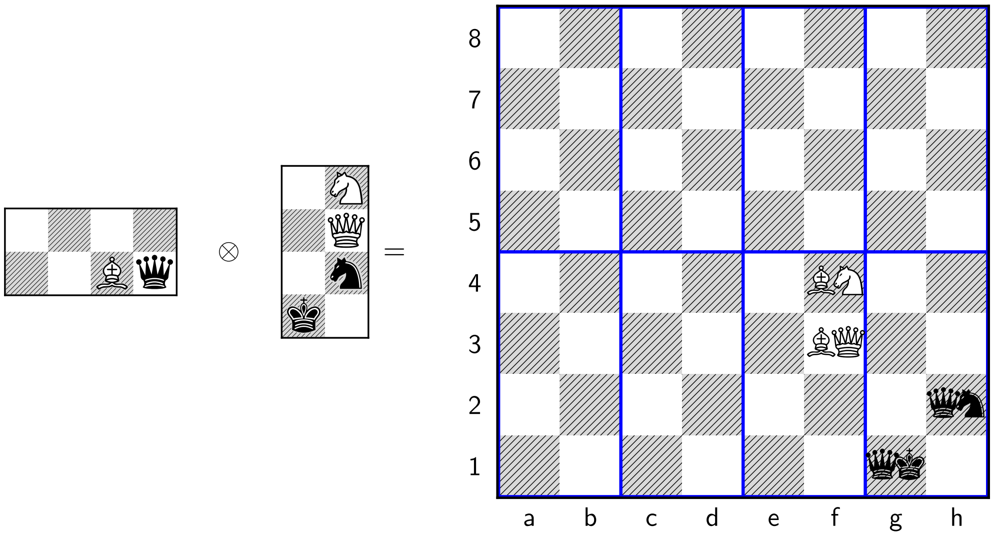
13:



23:



33:



Jetzt müssen wir also herausfinden, für welche Figuren die einzelnen Figurenprodukte stehen.